Početní část 1 - 31.5.2022

1. Uvažme 2π-periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou pro $x \in (-\pi, \pi]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   (a) Rozviňte f v trigonometrickou Fourierovu řadu s periodou 2π.

   (b) Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konverganci této řady.

   (c) Dosazením vhodné hodnoty x určete součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1 - 16k^2}.$$

(10 bodů)

Řešení:

Funkce je sudá, koeficienty u $\sin(nx)$ budou tedy všechny nulové. Dále počítáme pro $n > 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((1-n)x) + \cos((1+n)x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((1-n)x)}{1-n} + \frac{\sin((1+n)x)}{1+n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((1-n)\frac{\pi}{2})}{1-n} + \frac{\sin((1+n)\frac{\pi}{2})}{1+n} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{1-n^2}. \end{aligned}$$

Dále zřejmě $a_0 = \frac{2}{\pi}$ a $a_1 = \frac{1}{2}$.

Dále víme, že

$$\cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{pro } n = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Dostáváme tedy

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1-4k^2} \cos(2kx).$$

Protože je f spojitá a po částech C^1 platí pro $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{1-4k^2}\cos(2kx),$$

přičemž konvergence je dokonce stejnoměrná na $\mathbb{R}$. Po dosazení $x = \frac{\pi}{4}$ dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{1-16k^2}$$

a po úpravě

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{1-16k^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\pi}\right).$$

2. Uvažme funkci $f(z) = \dfrac{1}{\cosh^2 z}$.

   (a) Dokažte, že f je holomorfní na svém definičním oboru a tento definiční obor určete.

   (b) Spočtěte hlavní část Laurentovy řady funkce f na prstencovém okolí každého bodu, ve kterém má f pól.

   (8 bodů)

Řešení:

Platí $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Pokud tedy $\cosh(x+iy) = 0$ musí platit

$$e^x(\cos y + i \sin y) = -e^{-x}(\cos y - i \sin y).$$

Po úpravě

$$-e^{2x} = \frac{\cos y - i \sin y}{\cos y + i \sin y} = (\cos y - i \sin y)^2$$

Pravá strana je reálná a záporná musí tedy platit $\cos y = 0$ a rovněž zřejmě $x = 0$. Dostaváme tedy obecný tvar kořenu $(\frac{\pi}{2} + k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definiřní obor f tedy bude $\mathbb{C} \setminus \left\{ (\dfrac{\pi}{2} + k\pi)i : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Protože $\cosh' z = \sinh z$ a $\sinh((\frac{\pi}{2} + k\pi)i) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, má f ve všech těchto bodech pól násobnosti 2. Navíc jde o sudou funkci a tedy hlavní část Laurentovy řady bude mít tvar $\dfrac{A_k}{(z - (\frac{\pi}{2} + k\pi)i)^2}$ pro nějaké $A_k \in \mathbb{C}$.

Protože Taylorův polynom $\cosh^2 z$ v bodě $(\frac{\pi}{2} + k\pi)i$ stupně 2 je

$$-\left(z - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i\right)^2.$$

Snadno zdůvodníme (například pomocí metody neurčitých koeficientů), že $A_k = \frac{1}{-1} = -1$.